Title	特異点における関数の位数 (特異点論とその応用)
Author(s)	泉, 脩藏
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1122: 26-34
Issue Date	2000-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/63544
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1122 巻 2000 年 26-34

特異点における関数の位数

近畿大理工学部　泉 脩藏　(Shuzo IZUMI)

私の過去の仕事について話をする機会をいただきました。これまで, もっぱら特異点 (=解析空間の芽) における解析関数の**位数**と, 形式関数の**収束**について研究してきましたが, 今回は位数の話しの方に絞り, 多くの人による古典的な結果を含めて, これまでに何が明らかになったかを概説します。したがって新しい結果はありません。なお数理解析研究所講究録 926 (1995) の拙文において, オーヴァーラップも多いが, 位数の理論のやや異なる面を紹介しているのであわせてご覧下さい.

シンポジウムでは, 積の位数に関するエフェクティヴな評価として, まっさらなアイデアによる結果も述べましたが, その後ギャップが見つかりまだ解決していないので, この原稿でははずしました. 当日お聞きの方々には迷惑をおかけしました.

1. 位数の代数的側面

以下, 環は常に可換, ネーターで単位元 1 を持つものとし, その準同型は単位元を保つものとする.

定義 1.1. 環 R のイデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ と $f \in R$ に対して,

$$\nu_{\mathfrak{a}}(f) := \sup\{k : f \in \mathfrak{a}^k\} \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\},$$
$$\nu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) := \inf\{\nu_{\mathfrak{a}}(f) : f \in \mathfrak{b}\} \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}.$$

とおく. この ν を f あるいは $\mathfrak{b}$ の $\mathfrak{a}$ に関する**位数**と呼ぶ.

位数は次の Rees [R_5] '88 の意味でのフィルトレーションの条件を満たす.

(1) $0 \leq \nu_{\mathfrak{a}}(f) \leq \infty, \quad \nu_{\mathfrak{a}}(0) = \infty,\ \nu_{\mathfrak{a}}(1) = 0,$

(2) $\nu_{\mathfrak{a}}(f+g) \geq \min\{\nu_{\mathfrak{a}}(f), \nu_{\mathfrak{a}}(g)\},$

(3) $\nu_{\mathfrak{a}}(fg) \geq \nu_{\mathfrak{a}}(f) + \nu_{\mathfrak{a}}(g),$

(4) $\nu_{\mathfrak{a}}(\lambda f) = \nu_{\mathfrak{a}}(f)\ (\lambda \in \mathbb{C}^*).$

(3) で常に等式がなりたつような ν は**付値**と呼ばれる.

命題 1.2. [S] '52. $\overline{\nu}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) := \lim_{k\to\infty} \nu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})^k/k\ (\in [0, \infty])$ **は存在する**.

証明. (1) $M := \sup_{k\to\infty} \nu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}^k)/k < \infty$ の場合.

$$\exists k_0 : \nu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}^{k_0}) \geq k_0(M - \epsilon). \quad k = k_0 q + r\ (r \in [0, k_0 - 1]).$$
$$\nu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}^k) \geq q\nu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}^{k_0}) \geq qk_0(M - \epsilon).$$

$$\frac{\nu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}^k)}{k} \geq \frac{qk_0(M-\epsilon)}{qk_0+r} \longrightarrow M-\epsilon. \quad \lim_{k\to\infty} \nu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})^k/k = M$$

(2) $M := \sup_{k\to\infty} \nu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}^k)/k = \infty$ の場合も同様である． □

$\overline{\nu}$ は**被約位数**と呼ばれる．

例 1.3. $R := K\{x,y\}/(y^2-x^3)$ とし，$\mathfrak{m} \subset R$ をその極大イデアルとするとき，$\nu_{\mathfrak{m}}(x) = 1$，$\nu_{\mathfrak{m}}(y) = 1$，$\overline{\nu}_{\mathfrak{m}}(y) = 3/2$ である．

歴史的問題 1.4. [S] '52. $\lim \overline{\nu}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) \in \mathbb{Q}$?

定理 1.5. [R$_1$] '55, [N] '57.
局所環 R: の完備化 R^* が被約であれば（つまり零因子を持たなければ），$e_i \in \mathbb{N}$ と，付値 $V_i : R \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0,\infty\}$ $(i=1,...,p)$ があって，$\overline{\nu}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = \min_i\{\frac{V_i(\mathfrak{b})}{e_i}\} \in \mathbb{Q}$ となる．

Rees はブローアップによるのと類似の環の拡張 $R \subset R[tg_1,...,tg_n,\frac{1}{t}]$ を用いて，イデアル $\mathfrak{a}$ が単項イデアルのときに帰着させた．

定理 1.6. [R$_4$] '56. **R を局所環，$\mathfrak{a} \subset R$ をそのイデアルとすると，次の条件は同値である．**

(1) $\exists b \in \mathbb{R}, \forall f \in R$: $(\nu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{f}) \leq)\ \overline{\nu}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{f}) \leq \nu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{f}) + b$.
(2) R^* **は被約である．**

$(X, \mathcal{O}_X)$ を複素解析空間，$R := \mathcal{O}_{X,\xi}$ を $\xi \in X$ の局所環（解析的局所環），$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\xi \subset R$ を極大イデアル（ξ で値 0 をとる解析関数の芽の全体）とする．

定義 1.7. $f \in R$ に対して，

$$\nu_\xi(f) := \nu_{\mathfrak{m}}(f)$$

を ξ における**（代数的）位数**，

$$\mu(f) := \mu_\xi(f) := \sup\{k : \text{ある } h>0 \text{ があって } \xi \text{ のある近傍 } U \text{ で } |f(x)| \leq h|x|^k\}$$

を ξ における**解析的位数**という．

$(X, \mathcal{O}_X)$: を正の次元を持つ被約な複素解析空間とする．$\mathcal{M}$ を，正規解析空間 Y から ξ の近傍への固有な解析写像 $\Pi : Y \longrightarrow X$ で，X の部分空間 $\Pi^{-1}(\xi)$ が超曲面になる，つまり，その定義イデアル層が局所的に非零因子 1 個で生成されるようなものの全体とする．$\Phi \in \mathcal{M}$ のとき$\Pi^{-1}(\xi)_{\mathrm{red}}$ の既約成分を $\{E_1,...,E_n\}$ とする．Riemann の第二特異点除去可能定理により，

補題 1.8. $F \in \Gamma(E_i, \mathcal{O}_Y)$ の E_i に沿う位数 $\nu_{Y,E_i,\xi}(F)$ は $\xi \in E_i$ によらない．

特に $f \in \mathcal{O}_{X,\xi}$ とすると，$f \circ \Phi \in \Gamma(E_i, \mathcal{O}_Y)$ となるから，$V_i(f) := \nu_{Y,E_i,\xi}(f\circ\Phi)$ とおく。これは R 上の付値となる．さらに $V_i(\mathfrak{m}) := \inf\{V_i(f) : f \in \mathfrak{m}\}$ と置く．次の定理は特異点における位数を論じるときに基本となる．

定理 1.9. [L-T] '74. **X を被約とし，$R := \mathcal{O}_{X,\xi}$ とすると，$f \in R$ と p, $q \in \mathbb{N}$ に対して次の条件は同値である．**

(1) $\overline{\nu}(f) \geq p/q$.
(2) $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists \sigma_i \in R$: $\nu(\sigma_i) \geq ip/q$, $f^k - \sigma_1 f^{k-1} + \cdots \pm \sigma_k = 0$.

(3) $\Phi : D \longrightarrow X$ を単位円盤 $D \subset \mathbb{C}$ からの解析写像で $\Phi(0) = \xi$ とすると.

$$\nu_0(f\circ\Phi) \geq (p/q)\inf\{\nu_0(g\circ\Phi) : g \in \mathfrak{m}\}.$$

(4) $\forall\Phi \in \mathcal{M} : Y \longrightarrow X, \quad \inf\dfrac{V_i(f)}{V_i(\mathfrak{m})} \geq \dfrac{p}{q}.$

(5) $\exists\Phi \in \mathcal{M} : Y \longrightarrow X, \quad \inf\dfrac{V_i(f)}{V_i(\mathfrak{m})} \geq \dfrac{p}{q}.$

(6) $\mu(f) \geq \frac{p}{q}$.

(1)$\Longleftrightarrow$(2) の部分は [R_1] '55 による.

(1)$\Longleftrightarrow$(6) により, 被約位数は, 解析関数の増大度を評価するもっとも簡単なタイプの Lojasiewicz exponent と言うことがわかる. 本当はもとの定理は連接層を扱うもっと一般的なものである. 証明はブローアップの正規化を用いる大変幾何学的なものである. (1.9) を基礎にして次の定理を得る.

定理 1.10. (積の位数の評価) [I_2] '85, [R_6] '92.
R を正の次元の局所環とする. その完備化(次の節を参照)が整域となることと次の条件は同値である.

$$\exists a,\ b \in \mathbb{R},\ \forall f,\ g \in R:\ (\nu(f) + \nu(g) \leq)\ \nu(fg) \leq \nu(f) + a\nu(g) + b.$$

(このような a,b があれば $a \geq 1$ と $b \geq 0$ がなり立っている.)

これを手短に言うと, $\nu(fg) - \nu(f)$ と $\nu(g)$ が**線形比較可能**ということである. つまり Artin-Rees の補題の強化である. これは V_i が線形比較可能であると言うことに帰着する. この定理は Izumi が解析的局所環で示し, Rees が一般化した. ここにあげた Rees による不等式の形の方が, Izumi が定式化した形 $\nu(fg) \leq a(\nu(f) + \nu(g)) + b$ よりも強力であることに注意しておく.

これらの 1 次元の場合の証明は容易である. 2 次元の場合の証明は曲面上の曲線の交点行列を用いるもので, とても楽しい. 高次元の場合は Flenner の局所環に対する Bertini 型の定理等を用いるので, 環論の難しいところが必要となる.

2. 準同型と Krull 位相

$(R, \mathfrak{m}), (S, \mathfrak{n})$ を局所環とする.

$$\nu(f) = \nu_{\mathfrak{m}}(f) := \sup\{k : f \in \mathfrak{m}^k\},\quad d(f,g) := \exp(-\nu(f-g))$$

とおくと d は R 上の距離関数となる. (実は三角不等式より強く $f,\ g,\ h \in R$ に対して, $d(f,h) \leq \max\{d(f,g), d(g,h)\}$ が成立するから, d はウルトラ メトリックである。) R のこの距離に関する完備化 R^* は, 自然に R の拡大環となり, これもまた局所環となる. その極大イデアル $(\mathfrak{m}^*)^k$ と R の共通部分は $\mathfrak{m}^k$ と一致する. 従って $\mathfrak{m}^*$ による距離は d の拡張である.

さて $\varphi : R \longrightarrow S$ を, 解析的局所環の $\mathbb{C}$ 代数としての準同型としよう. これは自動的に $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{n}$ の中に写像し連続となる. したがって完備化の準同型 $\varphi^* : R^* \longrightarrow S^*$ に拡張される. これを φ の完備化といい, φ^* で表す.

命題 2.1. 次の条件は同値である.

(1) **自然にひきおこされる写像 $(R/\ker\varphi)^* \longrightarrow S^*$ は単射である.**

(2) φ **は開写像である．（全ての開集合の像が** $\varphi(A)$ **の中で，相対位相に関して開集合となる．）**
(3) $\exists e : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\ :\ \varphi(A) \cap \mathfrak{n}^{e(k)} \subset \varphi(\mathfrak{m}^k)$.

(2)$\Longleftrightarrow$(3) は自明である．(1)$\Longrightarrow$(3) は完備局所環の 0 に収束するイデアルの列に関する Chevalley の定理から出る．(1) の $(R/\ker\varphi)^* \longrightarrow S^*$ が単射とならない例があるかどうかは長い間問題であったが，Gabrielov [G_1] '71 が単射とならない例を発見した．

命題 2.2. （*implicit in* [BZ] '79, *cf.* [I_3] '89）．A, B: **不変距離を持ったアーベル群，** $\varphi : A \longrightarrow B$ **を連続写像，** $\varphi^* : A^* \longrightarrow B^*$ **を** φ **の完備化とする．このとき次の条件は同値である．**
(1) $\varphi(A)$ **は** B **の閉集合である．**
(2) $\overline{\varphi^*(A)} \cap B = \varphi^*(A)$ **（つまり** $\varphi(A)$ **は** B **の閉集合である．）**
(3) $\varphi^*(A^*) \cap B = \varphi^*(A)$.

解析的局所環の準同型の場合で言えば，(3) は「形式関数の引き戻しが収束しておれば，引戻す前から収束する解析関数である」という主張である．

3. Chevalley 評価

$\Phi : (Y, \eta) \longrightarrow (X, \xi)$ を解析写像の芽とするとき，それによって引き起こされる解析的局所環の準同型を $\varphi : \mathcal{O}_{X,\xi} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,\eta}$ で表すことにする．つまり $\varphi(f) := f \circ \Phi$ とする．

$$\operatorname{grk}\Phi = \operatorname{grk}\varphi := \frac{1}{2}\inf\{\dim \Phi(U) : U \text{ は } \xi \text{ の近傍 }\}$$

とおき，これを **ジェネリック ランク** という （[G_2] '73）．

定理 3.1. **（線型** *Chevalley* **評価）** [I_1] '82, [I_4] '86.
次の条件は同値である．
(1) $\operatorname{grk}\Phi = \dim X_\xi$ **（**$\Leftrightarrow$ **上の（2.2）の条件が成立する）．**
(2) $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall f \in A$: $a\overline{\nu}(f) \geq \overline{\nu}(\varphi(f))$.

解析的局所環のときは，[I_2] '85 から導かれる．一般の場合は[R_6] '89 から導かれる．(1.6) によれば，(2) は

$$\exists a,\ \exists b \in \mathbb{R},\ \forall f \in A :\ a\nu(f) + b \geq \nu(f \circ \Phi)$$

と同値である．

位数の話ではないが，(2.2) の条件と，上の定理の条件 (1) が同値であるという結果[G_2] '73 は，局所解析幾何学では最も重要な仕事の一つであろう．この結果と (3.1)(2) $\Longrightarrow$ (2.1)(3) であることから，$\varphi(A)$ が閉集合であれば，φ は開写像となっていることが解る (Becker?)．

積の位数の評価や線形 Chevalley 評価に於ては，Bierstone-Milman [BM] '98 によって係数の局所有界性が決定的に重要なことが知られている．T. Wang [Wa] '95 は，写像が準固有ならば，ターゲット空間の積の位数評価の局所有界性から，線形 Chevalley 評価の局所有界性が出ることを示している．さらに重複度 2 の超曲面に於て，積の位数評価の局所有界性が実際に成立していることを確かめた．

ジェネリック ランクの条件を満たさぬ病的な写像は，どの程度非線型な Chevalley 評価を持つのだろうか．古典的な次の例を考えよう．

例 3.2. [O] '65. $x = s,\ y = st,\ z = st\exp t$ で定義される解析写像 $\Phi : \mathbb{C}\{x, y, z\} \longrightarrow \mathbb{C}\{s, t\}$ でひきおこされる準同型 φ はその完備化を含めて単射である．言い替えれば $s,\ st,\ st\exp t$ は形式的関係を持たない．したがって，(2.1) によりなんらかの Chevalley 評価はなりたつ．しかし $\operatorname{grk}\varphi = 2 < 3$ であるから，(3.1) によりそれは線形では有り得ない．最終節の (4.5), (4.7) を用いると，評価関数を 2 次関数にとることができることが解る．詳しくは[I_8] '96 参照．

(X, ξ) を正規特異点とし，$\Phi : (Y, E) \longrightarrow (X, \xi)$ を modification とする．すると正規性により $\forall f \in \Gamma(E, \mathcal{O}_Y)\ \exists g \in \mathcal{O}_{X,\xi}$: $f = g \circ \Phi$ が成立する．しかも，(3.1) によれば，$\exists a,\ \forall f : \overline{\nu}_\xi(g) \geq ak \longrightarrow \forall \eta,\ \overline{\nu}_\eta(f) \geq k$ ととなることが容易に解る．つまり例外集合 E の 1 点での，極大イデアルに関する位数が高いと，E 全体に波及する．これは例外集合に限ったことではない．

定理 3.3. [I_5] '92. ***E を被約複素解析空間 X の被約な部分空間とし，$X_{\rm reg}$ の E のまわりの芽が連結集合となるものとする．言い替えると X が E のまわりで既約であるとする．もし E が Moishezon 空間ならば，E の 1 点での極大イデアルに関する位数が高い E のまわりの関数芽は，E 全体に沿って線形評価をともなう高い位数で消えている．（ここでは，関数芽は E 全体で定義されていることが大切である．）***

少し抽象代数学に戻ろう．K を標数 0 の体とし，R を優秀 (excellent) な K 上の局所環とする．すると R 上の微分加群で有限型なもののうちでは universal property を持ったもの（普遍有限微分加群）が存在する（Bingener, Scheja-Storch, [SS] '72）．これは解析的局所環 $R := \mathcal{O}_{X,\xi}$ の場合で言えば，1 次正則微分形式の ξ における芽全体に相当するものである．

φ を K 上の局所整域とする．完備化すると優秀環となるので，その普遍有限微分加群を用いて，ジェネリック ランク $\operatorname{grk}\varphi$ が定義できる．(1.10) が一般の局所環でなりたつので，最初解析的局所環で示された (3.1) は次のように拡張される．

定理 3.4. [I_7] '96. ***K を標数 0 の体とし，$\varphi : A \longrightarrow B$ を，整域である局所 K 代数の準同型とする．すると次の条件は同値となる．***

(1) $\operatorname{grk}\varphi = \dim X_\xi$

(2) $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall f \in A$: $a\overline{\nu}(f) \geq \overline{\nu}(\varphi(f))$.

Rees の定理 [R_6] '89 は K の標数 0 の仮定をおいていないが，(3.4) では普遍有限微分加群を用いるところでその仮定を必要とした．本当に要るのだろうか．

4. 零評価

(3.3) と，特異点上の多項式関数に対する Hilbert 関数と，特異点の極大イデアルに関する次数環の Samuel 関数の比較することによって，$\mathbb{C}^n$ の既約な解析集合芽の代数性の特徴付けが得られる：

定理 4.1. [I_6] '92. ***S を $\mathbb{C}^n$ の正の次元の既約な解析集合芽とすると次の条件は同値である．***

(1) S は代数集合の芽の既約成分である．

(2) $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] : a \cdot \deg\ F \geq \nu_{S,0}(F|S)$.

ここで，$\nu_{S,0}(F|S)$ は $\mathcal{O}_{S,0}$ における位数とする．

例 4.2. $S := \{z : y = \exp x - 1\}$ とすると, 上の Hilbert 関数と Sammuel 関数の比較により, $\exists a > 0:\ a\cdot(\deg\ F)^2 \geq \nu_{S,0}(F|S)$ が容易に解る.
さらに定数係数線形常微分方程式のもっとも基礎的な話を用いることで, x と $\exp x$ の次数 k の多項式で, 位数が $(\deg F+1)^2$ の零点をとるものの存在が解る. このように次数に較べて高い位数の零点が生じる理由は関数 $\exp x$ の超越性にあるのである.

Liouville 数と言われる超越数の構成に習うと, ある函数芽 f で, それと座標関数を k 次の多項式に代入したとき, k の任意有限乗より高位の零点を持つものが構成できる（上田, cf. [I_6] '92）.

以下いくつかの記号を導入する. $(R,\mathfrak{m})$ を $\mathbb{C}$ 上の局所環とする.

$$\Phi := \{\Phi_1,...,\Phi_n\} \subset \mathfrak{m}^{\times n} \quad (\times n \text{ は直積を表す.})$$

$$\deg_\Phi f := \min\{\deg F:\ F\in K[X],\ f = F(\Phi)\}$$

$$(f\in R\backslash K[\Phi] \text{ なら } \deg_\Phi f := \infty.)$$

$$\theta_{\nu,\Phi}(k) := \sup\{\nu(f) : \deg_\Phi(f)\leq k,\ \nu(f)\leq\infty\}.$$

$$\alpha(\nu,\Phi) := \limsup_{k\to\infty}\log_k\theta_{\nu,\Phi}(k).$$

$\theta_{\nu,\Phi}(k)$ は k と Φ に関して非減少であり, $\alpha(\nu,\Phi)$ は Φ に関して非減少である.

$\theta_{\nu,\Phi}(k)$ の評価は超越数の理論と関係があり, その方面では**零評価**と言われる.

定理 4.3. (*UPPER ESTIMATE*) [I_8] '96.
$(R,\mathfrak{m})$ を $\mathbb{C}$ 上の局所環とする. $\Phi := \{\Phi_1,...,\Phi_m\}\subset\Psi := \{\Psi_1,...,\Psi_n\}\subset\mathfrak{m}^{\times n}$ に於て, Ψ の要素が $R(\Psi)$ 上代数的であれば,

$$\exists a:\ \theta_{\nu,\Phi}(k)\leq\theta_{\nu,\Psi}(k)\leq\theta_{\nu,\Phi}(ak),\quad \alpha(\nu,\Psi)=\alpha(\nu,\Phi).$$

命題 4.4. (*LOWER ESTIMATE*) [I_8] '96.
R を $\mathbb{C}$ 上の局所環とし, $\Phi\subset R$ を有限集合とすると$\alpha(\Phi)\geq \mathrm{trdeg}_{\mathbb{C}}K(\Phi)/\dim R$.

$(R,\mathfrak{m}), (S,\mathfrak{n})$ を K 上の局所環, $\varphi: R\to S$ を準同型とする. $\kappa_\varphi : \{0,1,...\}\to[0,\infty]$ を

$$\kappa_\varphi(t) := \sup\{\nu_{\mathfrak{n}}(\varphi(f)) : \nu_{\mathfrak{m}}(f)\leq t\}$$

で定義する. また $\beta(\varphi)\in[0,\infty]$ を

$$\beta(\varphi) := \limsup_{t\to\infty}\log_t\kappa_\varphi(t)$$

で定義する.

命題 4.5. **$(R,\mathfrak{m})$ を解析的局所環とし,**

$$\Phi := \{\Phi_1,...,\Phi_p\}\subset\mathfrak{m}^{\times p},\quad \varphi(y_i)=\Phi_i$$

によって

$$\varphi : \mathbb{C}\{y\}\longrightarrow R \quad (y := (y_1,...,y_p))$$

を定義する. すると $\alpha(\Phi)\leq\beta(\varphi)$ となる.

Chevalley 評価 (4.1) によって, 次のことがでる.

系 4.6. S, R **を正次元の正規解析的局所環とし**, $\varphi : R \to S$ **を準同型とする**. $\Psi \subset \mathfrak{m}_R^{\times k}$ **とすると,**

$$\operatorname{grk}\varphi = \dim S \implies \beta(\varphi) = 1,\ \alpha(\Psi) = \alpha(\varphi(\Psi)).$$

ここで特異点を離れ, 正則解析的局所環 $R := \mathbb{C}\{x\}$ $(x = (x_1, ..., x_n))$ を考えよう. 超越性の理論では, 次の x と x の 1 次関数の指数関数の多項式に対する零評価は, もっとも標準的でよく知られている.

例 4.7. (well-known)

$$s := \dim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^{p} \mathbb{Q}\lambda_i, \quad t := \dim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^{q} \mathbb{Q}\mu_i$$

$$\implies \alpha(x, \exp\lambda_1 x, ..., \exp\lambda_p x, \exp\mu_1 y, ..., \exp\mu_q y) = \max\{s+1, t\}.$$

たとえば $\alpha(\exp x, \exp\sqrt{2}x)$ は, 幾何学的には, 超越的で滑らかな曲線 $Y = X^{\sqrt{2}}$ の (1,1) における埋入の非代数性＝**超越性**を量っているのである.

例 4.8. (cf. [I_8] '96) $\varphi : \mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{C}[x,y]$ を $X = \sqrt{1+x}$, $Y = \sqrt[3]{1+xy}$ で定義される準同型とする. 明らかに $\operatorname{grk}\varphi = 2$ である. このとき

$$\begin{aligned}
&\alpha(x, \exp\sqrt{1+x}, \exp\sqrt{2(1+x)}, \exp\sqrt[3]{1+xy}) \\
&= \alpha(x, \sqrt{1+x}, \exp\sqrt{1+x}, \exp\sqrt{2(1+x)}, \exp\sqrt[3]{1+xy}) \\
&= \alpha(\sqrt{1+x}, \exp\sqrt{1+x}, \exp\sqrt{2(1+x)}, \exp\sqrt[3]{1+xy}) \\
&= \alpha(X, \exp X, \exp\sqrt{2}X, \exp Y) = \max\{3,1\} = 3
\end{aligned}$$

(第 1, 第 2 の等式は (4.3), 第 3 番目の等式は (4.6), 4 番目の等式は (4.7) からでる.)

このようにして, **Nash 関数**（代数的な解析関数）の指数関数の零評価をある程度扱うことができる. これは以前には知られていなかったタイプの評価と思う.

解析空間からアファイン空間への正則写像の芽 $\Phi : (X,\xi) \longrightarrow \mathbb{C}^p$ が与えられ, これで引き起こされる準同型が単射であると仮定する. つまり像の解析的閉包が芽として $\mathbb{C}^p$ と一致していると仮定する. Φ の写像の成分 $\Phi_1, ..., \Phi_p$ に対する $\alpha(\Phi_1, ..., \Phi_p)$ が 1 よりどれだけ大きいかは, その写像芽が代数的であることからの隔りを表している. (3.2) の例では $\alpha(s, st, st\exp t) = 2$ となる. 特に Φ を X の芽のアファイン空間への埋入に限定して $\alpha(\Phi_1, ..., \Phi_p)$ の下限をとれば, (X,ξ) の代数的特異点からの内在的な隔たりを表す量を得る. （しかしこの下限の計算の仕方を, 筆者は全く知らない.)

付録

超越性の理論における典型的な零評価

定理 4.9. (*cf.* [P_1] '86, [P_2] '87, [P-W] '88)

$$R := \mathbb{C}\{x,y,z\}, \quad x := (x_1, ..., x_p),\ y := (y_1, ..., y_q),\ z := (z_1, ..., z_r),$$

$$\Psi := \{\lambda_{11}y_1, ..., \lambda_{1h_1}y_1,\ ..., \lambda_{q1}y_q, ..., \lambda_{qh_q}y_q,\ \mu_{11}z_1, ..., \mu_{1k_1}z_1,\ ...,\ \mu_{r1}z_r, ..., \mu_{rk_r}z_r\},$$

$$(\lambda_{ij}, \mu_{ij} \in \mathbb{C})$$

$$s_i := \dim_{\mathbb{Q}} \sum_{j=1}^{h_i} \mathbb{Q}\lambda_{ij}, \quad t_i := \dim_{\mathbb{Q}} \sum_{j=1}^{k_i} \mathbb{Q}\mu_{ij},$$

$$\Phi := \{x, y, \exp \Psi\} \subset R \quad (\exp \Psi := \{\exp \lambda_{11} y_1, ..., \exp \mu_{rk_r}\})$$

とするとき

$$\alpha(\Phi) = \max\{1 + s_1, ..., 1 + s_q, t_1, ..., t_r\}.$$

Noetherian 関数

Khovanskii, Tougeron, Gabrielov は Noetherian 関数という自然なカテゴリーを創出した. これが Nash のカテゴリーを含むものであるかどうかはわかっていないようである. Gabrielov と Khovanskii は, このカテゴリーにおける完全交差として得られる 0 次元特異多様体に対して, その重複度の評価を興味深い方法で行なった ([GK] '98) . このカテゴリーは零評価にも適したものと考えられる.

REFERENCES

[BM] E.Bierstone, P.D.Milman, Geometric and differential properties of subanalytic sets, Annals of Math. **147**, 731-785 (1998).

[BZ] J.Becker, W.R.Zame, Applications of functional analysis to the solution of power series equations, Math. Ann. **243**, 37-54 (1979).

[C] C.Chevalley, On the theory of local rings, Ann. Math. **44**, 690-708 (1943).

[G_1] M.Gabrielov, The formal relations between analytic functions, Functional Anal. Appl. **5**, 318-319 (1971) (Funkcional. Anal. i Prilozhen **5**, 64-65 (1971)).

[G_2] M.Gabrielov, Formal relations between analytic functions, Math. USSR Izvestija **7**, 1056-1088 (1973) (Izv. Akad. Nauk. SSSR **37**, (1973)).

[G_3] M.Gabrielov, Multiplicities of zeros of polynomials on trajectories of polynomial vector fields and bounds on degree of nonholomorphy, Math. Res. Lett. **2**, 437-451 (1995),

[GK] A.Gabrielov, A.Khovanskii, Multiplicity of a Noetherian intersection, in Geometry of differential equations (ed. A.Khovanskii, A.Varchenko, V.Vassiliev) A.M.S. Translations, Ser. 2 **186**, A.M.S. Rhode Island, 1998 119-130.

[I_1] S.Izumi, Linear complementary inequalities for orders of germs of analytic functions, Invent. Math. **65**, 459-471 (1982).

[I_2] S.Izumi, A measure of integrity for local analytic algebra, Publ. RIMS Kyoto Univ. **21**, 719-735 (1985).

[I_3] S.Izumi, The rank condition and convergence of formal functions. Duke Math. J. **59** (1989), 241-264.

[I_4] S.Izumi, Gabrielov's rank condition is equivalent to an inequality of reduced orders, Math. Ann. **276**, 81-89 (1986).

[I_5] S.Izumi, Increase, convergence and vanishing of functions along a Moishezon space, J. Math. Kyoto Univ. **32**, 245-258 (1992).

[I_6] S.Izumi, A criterion of algebraicity of analytic set germs, Proc. Japan Acad. **68**, Ser. A 307-309 (1992).

[I_7] S.Izumi, Note on linear Chevalley estimate for homomorphisms of local algebras, Communications in algebra **24**, 3885-3889 (1996).

[I_8] S.Izumi, Transcendence measure for subsets of local algebras, in Real analytic and algebraic singularities (ed. T.Fukuda, T.Fukui, S.Izumiya, S.Koike), Pitman Res. Note in Math. Ser **381**, Longman, Harlow, 1996, 189-206.

[L-T] M.Lejeune-Jalabert - B.Teissier, Clôture integral des idéaux et équisingularite, Univ. Sc. et Medicale de Grenoble, 1974.

[N] M.Nagata, Note on a paper of Samuel concerning asymptotic properties of idels, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A **30**, 165-175 (1957).

[Ne] Y.V.Nesterenko, Measures of algebraic independence of numbers and functions, Astérisque **147-148**, 141-149 (1987).

[O] W.F.Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie Band II, Chelsea, New Tork 1965.

[P_1] P.Philippon, Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, Bull. Soc. Math. France **114**, 355-383 (1986).

[P_2] P.Philippon, Errata et addenda à ⟨⟨ Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs ⟩⟩, Bull. Soc. Math. France **115**, 397-398 (1987).

[P-W] P.Philippon, M. Waldschmidt, Formes lineaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs, Illinois J. Math. **32**, 281-314 (1988).

[R_1] D.Rees, Valuation associated with a local ring (I), Proc. London Math. Soc. (3) **5**, 107-128 (1955).

[R_2] D.Rees, Valuation associated with ideals, Proc. London Math. Soc. (3) **6**, 161-174 (1956).

[R_3] D.Rees, Valuation associated with ideals (II), J. London Math. Soc. (3) **31**, 221-228 (1956).

[R_4] D.Rees, Valuation associated with a local ring (II), J. London Math. Soc. (3) **31**, 228-235 (1956).

[R_5] D.Rees, Lectures on the asymptotic theory of ideals, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **113**, Cambridge, Cambridge 1988.

[R_6] D.Rees, Izumi's theorem, in Commutative algebra (ed. M.Hochster, C.Huneke, J.D.Sally), Math. Sci. Res. Inst. Pub. **15**, Springer, N.Y., 1989, 407-416.

[SS] Scheja, G., Storch, U., Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren. Math. Ann. **197** (1972), 137-170.

[S] P.Samuel, Some asymptotic properties of powers of ideals, Ann. Math., **56**, 11-21 (1952).

[Wa] T.Wang, Linear Chevalley estimate, Transaction of the American Mathematical Society **347**, 4877-4898 (1995).

(RIMS Symposium, June 1, 2, 1999)